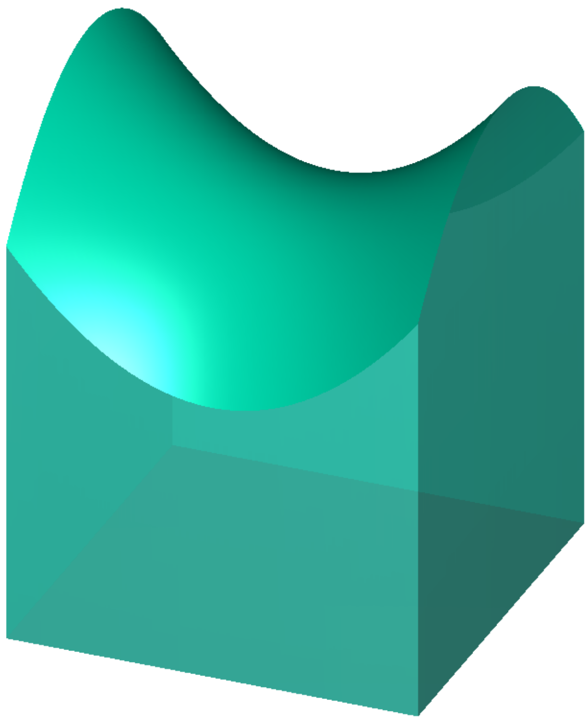
Integrales Múltiples

maths.cl

July 6, 2020



1 Introducción

En este capítulo consideramos la integral de una función de dos variables $f(x, y)$ sobre una región en el plano y la integral de una función de tres variables $f(x, y, z)$ sobre una región en el espacio. Estas integrales se conocen como integrales múltiples (se definen como el límite de las sumas de Riemann). Podemos usar las integrales múltiples para calcular cantidades que varían sobre dos o tres dimensiones, como la **masa total** o el **momento angular** de un objeto de densidad variable, así como el volumen de sólidos con fronteras curvas.

2 Integrales Dobles

En el capítulo 5 ofrecimos la definición de la integral definida de una función continua $f(x)$ sobre un intervalo $[a, b]$ como el límite de las sumas de Riemann. En esta sección ampliaremos esta idea para definir la integral de una función continua de dos variables $f(x, y)$ sobre una región acotada R en el plano. En ambos casos, las integrales son el límite de sumas de Riemann. Las sumas de Riemann para la integral de una función $f(x)$ de una variable se obtienen partiendo un intervalo finito en pequeños subintervalos, multiplicando el ancho de cada subintervalo por el valor de f en un punto c_k dentro de ese subintervalo, y luego sumando todos estos productos. Un método similar de partir, multiplicar y sumar sirve para construir integrales dobles. Sin embargo, esta vez dividimos una región plana R en pequeños rectángulos, en lugar de pequeños subintervalos. Luego consideramos el producto del área de cada pequeño rectángulo por el valor de f en un punto dentro del rectángulo, y finalmente sumamos todos estos productos. Cuando f es continua, estas sumas convergen a un número si en cada uno de los pequeños rectángulos su ancho y su altura tienden a cero. El límite es la integral doble de f sobre R. Al igual que en el caso de los intervalos, podemos evaluar las integrales múltiples por medio de antiderivadas, lo que nos libera de la enorme tarea de calcular una integral doble directamente como el límite de sumas de Riemann. El principal problema práctico que surge al evaluar las integrales múltiples consiste en determinar los límites de integración. Aunque evaluamos las integrales del capítulo 5 sobre un intervalo determinado por sus dos extremos, las integrales múltiples se evalúan sobre una región en el plano o el espacio. Esto da lugar a límites de integración con variables, además de constantes, y es precisamente la descripción de las regiones de integración la principal característica nueva que aparece en cálculo de las integrales múltiples.

2.1 Integrales dobles sobre rectángulos

Comenzamos nuestro estudio de las integrales dobles considerando el tipo más sencillo de región plana: un rectángulo. Consideremos una función $f(x, y)$ definida en una región rectangular R,

$$R: \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq x \leq d$$

Subdividimos a R en pequeños rectángulos usando una red de rectas paralelas a los ejes x e y (figura 1). Las rectas dividen a R en n partes rectangulares, donde el número de partes n crece cuando el ancho y la altura de cada una de ellas se vuelven más pequeños. Estos rectángulos forman una **partición** de R. Una pequeña parte rectangular de ancho Δx y de altura Δy tiene un área $\Delta A = \Delta x \Delta y$ si numeramos las pequeñas partes que dividen a R en cierto orden, entonces sus áreas están dadas por $\Delta A_1,\ \Delta A_2,\ \Delta A_3, ..., \Delta A_k, ..., \Delta A_n$ donde ΔA_k es el área del *k-ésimo* pequeño rectángulo.

Para formar una suma de Riemann sobre R, elegimos un punto en el $k - \textit{ésimo}$ pequeño rectángulo, multiplicamos el valor de f en ese punto por el área y sumamos los productos:

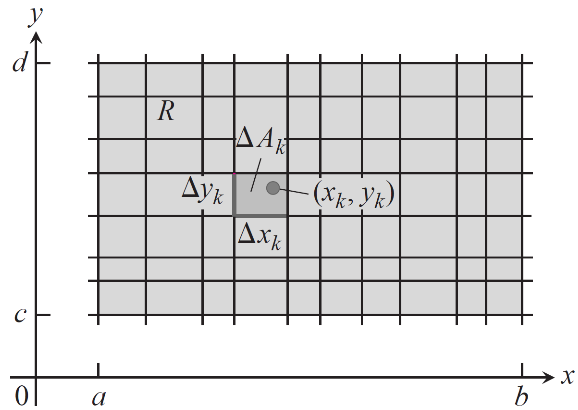


Figura 1: Cuadrícula Rectangular que divide a la región R

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

Dependiendo de la elección de (x_k, y_k) en el $k-\acute{e}simo$ pequeño rectángulo, podemos obtener distintos valores de S_n. A nosotros nos interesa saber qué ocurre con las sumas de Riemann cuando las anchuras y las alturas de todos los rectángulos pequeños de la partición de R tienden a cero. La **norma** de una partición P, que se escribe $\|P\|$ es el mayor de los anchos o de las alturas de los rectángulos en la partición. Si $\|P\| = 0,1$ entonces todos los rectángulos de la partición de R tienen un ancho máximo de 0.1 y una altura máxima de 0.1. A veces, las sumas de Riemann convergen cuando la norma de P tiende a cero, lo que se escribe $\|P\| \to 0$. El límite resultante se escribe como:

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

Cuando $\|P\| \to 0$ los rectángulos se vuelven más angostos y más cortos, y su número n aumenta, de modo que también podemos escribir este límite como:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

Si perder de vista que $\Delta A_k \to 0$ cuando $n \to \infty$ y $\|P\| \to 0$.

Hay muchas elecciones implicadas en un límite de este tipo. La colección de pequeños rectángulos queda determinada por la cuadrícula formada por las rectas horizontales y verticales que determinan una partición rectangular de R. En cada uno de los pequeños rectángulos resultantes se elige un punto arbitrario $f(x_k, y_k)$ donde se evalúa f. Estas elecciones determinan una sola suma de Riemann. Para formar un límite, repetimos todo el proceso una y otra vez, eligiendo particiones tales que los anchos y las alturas de los rectángulos tiendan a cero, y cuyo número tienda a infinito.

Cuando existe el límite de las sumas S_n es porque se obtiene el mismo valor límite sin importar las elecciones establecidas, y entonces la función f es **integrable**, mientras que al límite se conoce como la **integral doble** de f sobre R, que se escribe como:

$$\iint_R f(x,y)\,dA \quad \text{o} \quad \iint_R f(x,y)\,dx\,dy \tag{1}$$

Podemos mostrar que si $f(x,y)$ es una función continua en R, entonces f es integrable, al igual que en el caso de una variable que explicamos en el capítulo 5. Muchas funciones discontinuas también son integrables, incluso las funciones que son discontinuas en sólo un número finito de puntos o en curvas regulares. Dejaremos la demostración de estos hechos para un texto más avanzado.

2.2 Integrales dobles como volúmenes

Cuando $f(x,y)$ es una función positiva sobre una región rectangular R del plano xy, podemos interpretar la integral doble de f sobre R como el volumen de la región sólida tridimensional sobre el plano xy acotada abajo por R y arriba por la superficie $z = f(x,y)$ (figura 2). Cada término $f(x_k, y_k)\Delta A_k$ de la suma $S_n = \sum f(x_k, y_k)\Delta A_k$ es el volumen de una caja rectangular vertical que se aproxima al volumen de la porción del sólido que está directamente sobre la base ΔA_k. Así, la suma S_n se aproxima a lo que llamaremos el volumen total del sólido. Definimos este volumen como:

$$\text{Volumen} = \lim_{n\to\infty} S_n = \iint_R f(x,y)\,dA \tag{2}$$

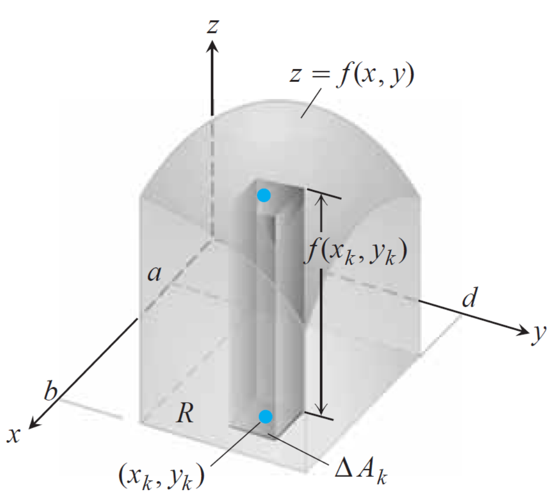


Figura 2: Una aproximación de infinitas cajas rectangulares

Donde $\Delta A_k \to 0$ cuando $n \to \infty$

Como podíamos esperar, este método general para calcular volúmenes coincide con los

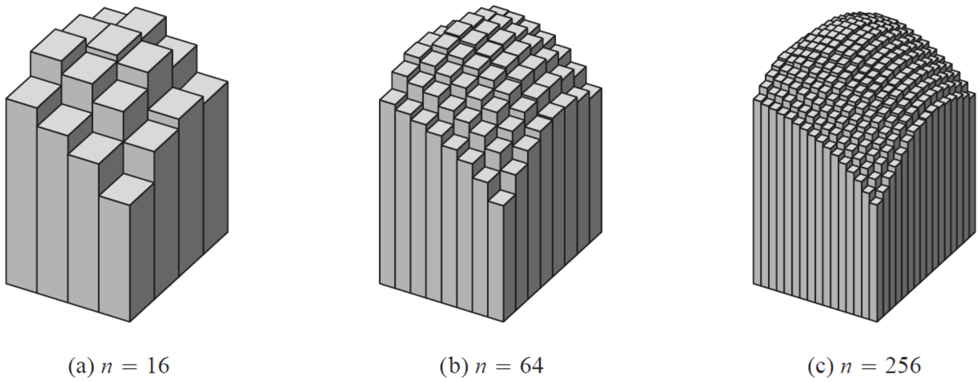


Figura 3: Volúmenes más precisos para diferentes valores de n

métodos del capítulo 6, pero aquí no demostraremos esto. La figura 3 muestra que las aproximaciones al volumen mediante sumas de Riemann son cada vez más precisas cuando el número n de cajas aumenta.

2.3 Teorema de Fubini para calcular Integrales Dobles

Suponga que queremos calcular el volumen que existe bajo el plano $z = 4 - x - y$ sobre la región rectangular $R: \; 0 \leq x \leq 2 \quad 0 \leq y \leq 1$ en el plano xy. Si aplicamos el método de rebanado, con rebanadas perpendiculares al eje X (figura 4), entonces el volumen estaría dado por:

$$\text{Volumen} = \int_{x=0}^{x=2} A(x)\, dx \tag{3}$$

donde $A(x)$ es el área de la sección transversal en x. Para cada valor de x, podemos calcular $A(x)$ mediante la integral:

$$A(x) = \int_{y=0}^{y=1} z(x, y)\, dy = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\, dy \tag{4}$$

que es el área bajo la curva en el plano de la sección transversal en x. Al calcular $A(x)$, x se mantiene fija y se integra con respecto a y. Al combinar las ecuaciones (3) y (4) vemos que el volumen de todo el sólido es:

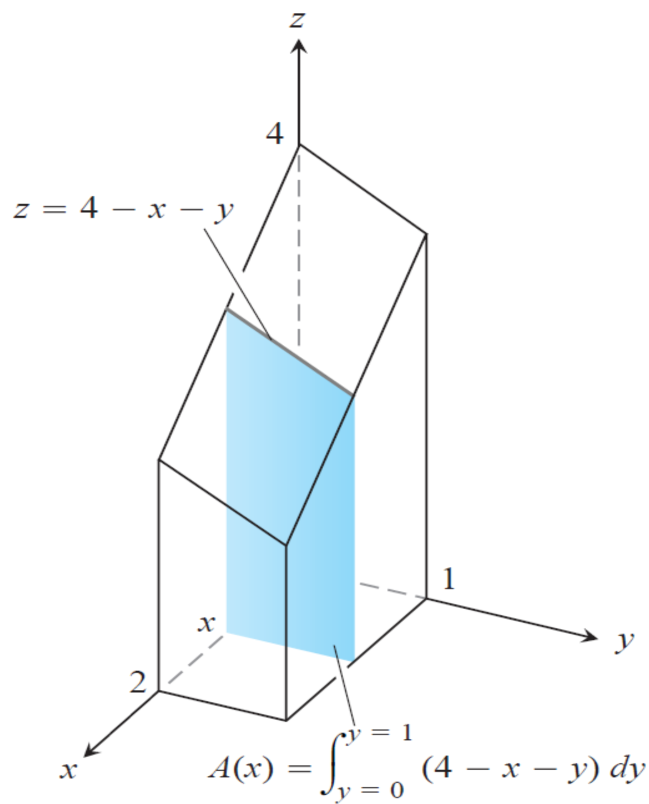


Figura 4: Para calcular el área de la integral doble, primero mantenemos a x fija e integramos con respecto a y

$$
\begin{aligned}
\text{Volumen} &= \int_{x=0}^{x=2} A(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=2} \left[\int_{y=0}^{y=1} (4-x-y)\,dy\right] dx \\
&= \int_{x=0}^{x=2} \left[4\int_0^1 dy - x\int_0^1 dy - \int_0^1 y\,dy\right] dx \\
&= \int_{x=0}^{x=2} \left[4 - x - \frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right] dx = \int_{x=0}^{x=2} \left[4 - x - \frac{1}{2}\right] dx \\
&= \int_{x=0}^{x=2} \left[\frac{7}{2} - x\right] dx \\
&= \left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 5
\end{aligned}
$$

Si sólo queremos escribir una fórmula para el volumen, sin realizar las integraciones, podemos escribir:

$$\text{Volumen} = \int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\, dy\, dx \tag{5}$$

La expresión de la derecha, llamada **integral iterada**, dice que el volumen se obtiene integrando $4 - x - y$ con respecto a y desde $y = 0$ hasta $y = 1$ con x fija, y después integrando la expresión resultante en x con respecto a x desde $x = 0$ hasta $x = 2$. Los límites de integración 0 y 1 se asocian con y, de modo que se colocan en la integral más cercana a dy. Los otros límites de integración, 0 y 2, se asocian con la variable x, de modo que se colocan en el símbolo integral exterior asociado a dx.